

9/11/22

1

Διατήρηση Εμπιστοσύνης για Διασπορά / Διακύμανση

ενα $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. $\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1) s^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} \right)$

n : μέγεθος δείγματος

s^2 : διακύμανση του δείγματος

μ, σ πληθυσμιακά
 \bar{x}, s δείγμα

$\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$: τιμή που παίρνω από πίνακα
†

βάθμια ελευθερία

α : επίπεδο σημαντικότητας ($\alpha = 5\%$)

$$\chi_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} = \chi_{n-1; 1-\frac{5\%}{2}} = \chi_{n-1; 0.975}$$

Παράδειγμα

50 Μετρήσεις για κόλωνα νοτατού

$$\bar{x} = 58,51, \quad s^2 = 270,49$$

Υποθέτουμε ότι για κανονική κατανομή μ, σ^2

Βρείτε 95% ΔΕ για μ, σ^2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Λύση: $n = 50 > 30$ και $\alpha = 5\%$ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1,96$

95% ΔΕ για μ : $\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$

$$\left(58,51 - \frac{16,45}{\sqrt{50}} \cdot 1,96, 58,51 + \frac{16,45}{\sqrt{50}} \cdot 1,96 \right)$$

$$(53,95, 63,07)$$

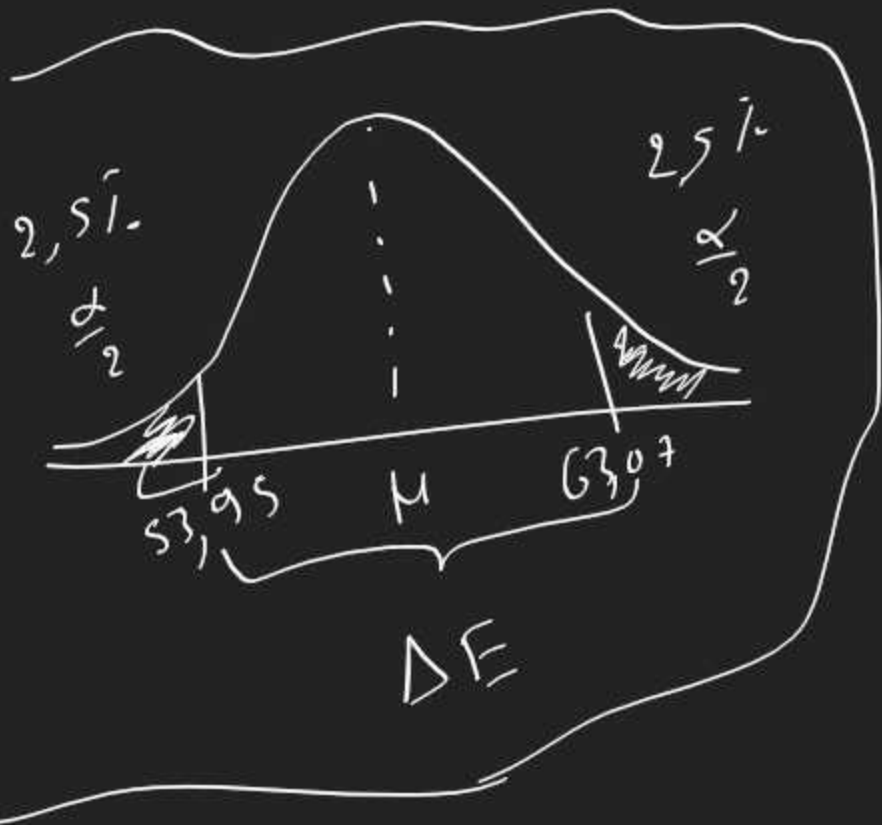
95% ΔΕ για σ^2 :

$$\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1; \frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}} \right)$$

$$\left(\frac{(50-1) \cdot 270,49}{\chi^2_{49; 0.025}}, \frac{(50-1) \cdot 270,49}{\chi^2_{49; 0.975}} \right)$$

$$\left(\frac{49 \cdot 270,49}{71,42}, \frac{49 \cdot 270,49}{32,36} \right)$$

$$(185,58, 409,61)$$



ΔΕ για παραμέτρους Δύο ανεξάρτητων κανονικών κατανομών ⁽³⁾

ΔΕ για διαφορά μέσων τιμών $\mu_1 - \mu_2$

α) σ_1^2, σ_2^2 γνωστά

95% ΔΕ: $\mu_1 - \mu_2$:

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

β) σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα, όπως $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ και $n_1, n_2 < 30$

95% ΔΕ $\mu_1 - \mu_2$:

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \cdot t_{n_1+n_2-2; \frac{\alpha}{2}}, \bar{X} - \bar{Y} + S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \cdot t_{n_1+n_2-2; \frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\text{με } S_p = \frac{(n_1-1) \cdot s_1^2 + (n_2-1) \cdot s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

γ) σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα και $n_1, n_2 \geq 30$

95% ΔΕ $\mu_1 - \mu_2$:

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

δ) σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα και άγνωστα και $n_1, n_2 < 30$

95% ΔΕ για $\mu_1 - \mu_2$:

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \cdot t_{m; \frac{\alpha}{2}}, \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \cdot t_{m; \frac{\alpha}{2}} \right)$$

όπου

$$m = \left\lceil \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{1}{n_1-1} \left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2 + \frac{1}{n_2-1} \left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2} \right\rceil$$

← ακέραιο + 1
[5,072] = 5
[6,891] = 6
[18,3497] = 18

Παράδειγμα: Όσο πλησιάζουν στην κεντρική τήξη.
 $n_1 = 16$ φοιτητές, με $\bar{x} = 14,28$ και $s_1^2 = 9,646$ $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
 $n_2 = 14$ φοιτητές με $\bar{y} = 17,23$ και $s_2^2 = 17,23$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

α) Βρείτε 95% ΔΕ για $\mu_1 - \mu_2$ όταν $\sigma_1^2 = 9$, $\sigma_2^2 = 16$

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} - \bar{y} + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \right) =$$
$$\left(14,28 - 17,23 - \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{14}} \cdot 1,96, 14,28 - 17,23 + \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{14}} \cdot 1,96 \right)$$
$$(-2,95 - 2,7, -2,95 + 2,7) =$$
$$(-5,65, -0,25)$$

β) Βρείτε 95% ΔΕ για $\mu_1 - \mu_2$ όταν γνωρίζουμε $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - \underline{S_p} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \cdot t_{n_1+n_2-2; \frac{\alpha}{2}}, \bar{x} - \bar{y} + \underline{S_p} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \cdot t_{n_1+n_2-2; \frac{\alpha}{2}} \right)$$
$$\left(14,28 - 17,23 - 3,21 \cdot \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{14}} \cdot 2,048, 14,28 - 17,23 + 3,21 \cdot \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{14}} \cdot 2,048 \right)$$
$$(-5,36, -0,54)$$

με $S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1) \cdot s_1^2 + (n_2-1) \cdot s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(16-1) \cdot 9,64 + (14-1) \cdot 17,23}{16+14-2}} = \sqrt{10,32} = 3,21$